

Questions de géométrie

2006-2007

Que faut-il pour déterminer entièrement

1. un plan de l'espace (3 cas demandés)
2. une droite de l'espace (2 cas demandés)

1. Calculer des équations paramétriques de la droite d qui passe par les points $A(3, 2, -1)$ et $B(1, -2, 1)$.
2. Vérifier si les points $C(1, 2, -1)$ et $D(6, 12, 5)$ appartiennent à d .
3. Calculer la coordonnée du point E de d dont l'abscisse vaut 9.

Calculer des équations cartésiennes de la droite d qui passe par le point $A(0, 1, 2)$ et de direction $(2, 1, 2)$.

On donne une droite $d \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ et le plan $\pi \equiv x + y + z = 1$

Calculer la coordonnée du point d'intersection de d et de π (point de percée). Expliquer la démarche.

Calculer une équation cartésienne du plan π contenant les points $A(2, -1, 3)$ et $B(3, 2, 1)$ et qui est parallèle au vecteur $(3, -1, 4)$. Expliquer la démarche.

Calculer 2 points du plan $\alpha \equiv 3x - y + 2z = 0$ et en déduire la coordonnée d'un vecteur directeur. Expliquer la démarche.

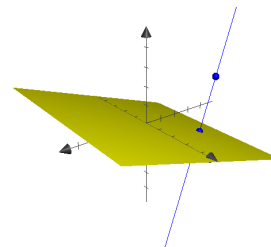
=====

Démontrer que si un plan π a pour équation cartésienne $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$, alors le vecteur de coordonnées (A, B, C) est un vecteur normal au plan π .

Préciser clairement (en français) le raisonnement.

1. Quel est le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan ?
2. Quel est le critère d'orthogonalité de 2 plans ?

Déterminer des équations cartésiennes de la droite d contenant le point $P(-4, 1, 2)$ et orthogonale au plan $\pi \equiv -x + 3z = 0$. Expliquer le raisonnement.



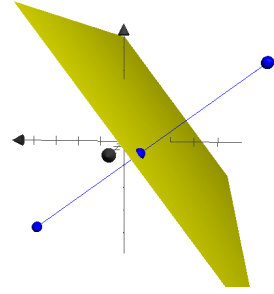
Calculer un vecteur directeur de la droite $d \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + z = 4 \end{cases}$

Donner une équation canonique d'une droite d et une équation cartésienne d'un plan π sachant que $d // \pi$. Justifier le choix.

Vérifier si les droites suivantes d_1 et d_2 sont orthogonales. Préciser le raisonnement.

$$d1 \equiv \begin{cases} \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{3} \\ z = 0 \end{cases} \quad d2 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

Calculer une équation cartésienne du plan médiateur au segment AB avec $A(3, 3, -3)$ et $B(-5, 5, 3)$. Expliquer le raisonnement.



=====

Soit les points $A(-1, 2, -3)$, $B(2, -3, 1)$ et $S(-1, -3, 2)$; écrire des équations paramétriques et cartésiennes :

1. du plan α qui comprend le point S et est parallèle au plan OXZ
2. du plan ABS
3. de la droite AB
4. de la droite d qui comprend le point A et est parallèle à l'axe OY

Ecrire une équation cartésienne du plan ABC avec $A(5, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$ et $C(0, 0, 4)$.

On donne une droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = 1-z$ et le plan $\alpha \equiv 2x - 3y + z = 1$.

1. Donner la coordonnée d'un point A de d .
2. Donner la coordonnée d'un vecteur directeur \vec{v} de d .
3. Calculer la coordonnée du point de percée P de d dans α .

Calculer une équation cartésienne du plan π orthogonal à la droite $d \equiv \begin{cases} x = 2\lambda - 8 \\ y = 3\lambda \\ z = 5\lambda - 2 \end{cases}$ et comprenant le point $P(2, 3, -1)$.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne une droite $d \equiv \begin{cases} x = \lambda - 2 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = 2\lambda \end{cases}$

Cocher les affirmations exactes; justifier.

- la droite d comprend le point de coordonnée $(2, -3, 2)$
- le vecteur $\vec{v}(-1, 1, 2)$ est un vecteur directeur de d
- la droite d est orthogonale au plan $\pi \equiv x - y + 2z = 3$
- la droite d est incluse au plan $\beta \equiv x - y - z = -4$
- la droite d est parallèle au plan $\gamma \equiv 4x + 2y - z = 3$

=====

2007-2008

Un plan est entièrement déterminé par : (répondre sur le questionnaire, être complet et précis)

- (1)
- (2)
- (3)
- (4)
- (5)
- (6)

Donner la définition d'un vecteur normal à un plan.

Démontrer que le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est normal au plan $\pi \equiv ax + by + cz = d$
 Préciser en français le déroulement de la démonstration ; il faut me convaincre...

- (1) Déterminer le réel a pour que le plan γ défini par les 3 points $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$ et $C(0, 0, a)$ passe également par le point $P(1, 2, 3)$.
- (2) Donner une équation cartésienne de γ .

On donne une droite $d \equiv \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$

Calculer les réels a et b pour que cette droite d soit incluse au plan $\gamma \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$.
 Justifier le raisonnement !

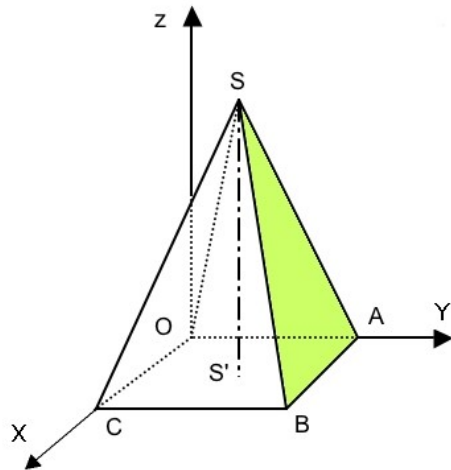
Avec la droite d et le plan γ de l'exercice précédent, existe-t-il un réel a pour lequel la droite d soit orthogonale au plan γ ?
 Justifier le raisonnement.

Etudier la position relative (justifier) :

- (1) des droites $d1 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$ et $d2 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 4 - 5\lambda \end{cases}$
- (2) des plans $\alpha \equiv 2x + y + 4z = 5$ et $\gamma \equiv -2x - y - 4z = 5$
- (3) du plan $\pi \equiv 3x + y - 5z = 0$ et de la droite $d \equiv \frac{x-2}{3} = y-1 = \frac{z-4}{2}$

On donne les points $A(1, 2, 3)$ et $B(4, -5, -6)$.

- (1) Calculer la distance entre les points A et B .
- (2) Calculer la coordonnée du point milieu du segment AB .



$SOABC$ est une pyramide à base carrée de côté 6, et de hauteur SS' de longueur 10.
 S' est le milieu du carré $OABC$.

- (1) Donner la coordonnée des points S, A, B, C et S' .
- (2) L'arête SA est-elle dans le plan XOZ (oui / non) ?
- (3) Calculer des équations paramétriques de l'arête SA .
- (4) Calculer la coordonnée de 2 vecteurs directeurs non parallèles de la face SAB .
- (5) La face SCB a pour équations paramétriques $SCB \equiv \begin{cases} x = 6 + 3\lambda + 3\mu \\ y = 3\lambda - 3\mu \\ z = -10\lambda - 10\mu \end{cases}$
 Calculer une équation cartésienne de la face SCB

On donne une droite $d \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ et le plan $\pi \equiv x + y + z = 1$

Calculer la coordonnée du point d'intersection de d et de π (point de percée). Expliquer la démarche.

Démontrer que si un plan π a pour équation cartésienne $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$, alors le vecteur de coordonnée (A, B, C) est un vecteur normal au plan π .
 Préciser clairement (en français) le raisonnement.

Vérifier si les droites suivantes $d1$ et $d2$ sont orthogonales. Préciser le raisonnement.

$$d1 \equiv \begin{cases} \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{3} \\ z = 0 \end{cases} \quad d2 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

Calculer une équation cartésienne du plan π orthogonal à la droite $d \equiv \begin{cases} x = 2\lambda - 8 \\ y = 3\lambda \\ z = 5\lambda - 2 \end{cases}$
 et contenant le point $P(2, 3, -1)$.

=====

Résoudre (c'est-à-dire préciser l'ensemble des solutions sous la forme $Sol = \{(x, y, z) \dots\}$) et donner l'interprétation géométrique :

(1) $3x + 6y - z = 4$

$$(2) \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

=====

On donne $S = \{(x, \frac{2x-1}{2}, 3x+1), x \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

1. Quelles sont les caractéristiques de ce système (nombres d'équations, nombre d'inconnues) ?
2. Calculer un système qui possède ces solutions.
3. Quelle interprétation géométrique peut-on donner à ce système et à ses solutions ?

Résoudre l'équation $3x - 2y + 5z = 0$

Pourquoi un système des 2 équations linéaires à 3 inconnues ne peut-il pas avoir de solution unique ?

Calculer l'intersection des 3 plans

$$\alpha \equiv x + 2y + 3z = 14$$

$$\beta \equiv 2x - y + z = 3$$

$$\gamma \equiv 3x + 2y - 4z = -5$$

Et en déduire leur position relative.

Résoudre le système $\begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$

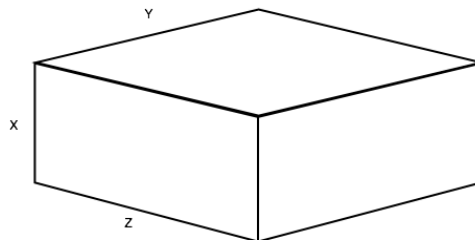
Donner l'interprétation géométrique.

Expliquer :

1. Système *simplement* indéterminé
 2. Système *doublement* indéterminé
-

Soit x , y et z les 3 dimensions d'un parallépipède rectangle.

La longueur totale des arêtes ($4x + 4y + 4z$) vaut 1004 cm.



Si on augmente respectivement ces 3 longueurs de 3, 5 et 2 cm, on obtient un *cube*, dont les arêtes sont identiques, et donc pour lequel on peut écrire $x + 3 = y + 5 = z + 2$.

Calculer les dimensions du parallépipède.

=====