Solutions des problèmes

Dans les notations qui suivent, le réel k peut être exprimé sous la forme (1+t) où t est le taux de croissance, ou (1-t) où t est le taux de décroissance.

(1)

Année	Période (année)	Population
1983	0	135426
1984	1	137229=135426 k
1985	2	135426 k^2
...	...	...
1990	7	135426 k^7
2000	17	135426 k^{17}
1970	-13	135426 k^{-13}
1900	-83	135426 k^{-83}

La seconde ligne du tableau permet de calculer $k = \dfrac{137229}{135426} = 1,013313... = 1 + t$.
Le taux de croissance vaut t=k-1=1,3313%

(2)

Soit T la taille initiale

Année	taille
0	T
1	$T(1,1)$
2	$T(1,1)^2$
...	...
x	$T(1,1)^x$

La taille aura doublé lorsque $T(1,1)^x = 2T \Leftrightarrow (1,1)^x = 2$
La taille aura triplé lorsque $T(1,1)^x = 3T \Leftrightarrow (1,1)^x = 3$

(3)

1. Capitalisation : 1 an
   Après 5 ans, le capital vaut $2500(1,04)^5$=3041,63 €
2. Capitalisation : 1 mois
   Le taux proportionnel vaut $\dfrac{4\%}{12}$
   Après 5 ans (60 mois), le capital vaut $2500\left(1 + \dfrac{0,04}{12}\right)^{12} = 3052,49$ €

$\boxed{(4)}$

Jour	Période (jour)	Bactéries
lundi passé	-7	$9.93 \cdot 10^4$
aujourd'hui lundi	0	$4,23 \cdot 10^5 = 9,93 \cdot 10^4 \cdot k^7$
lundi prochain	7	$9,93 \cdot 10^4 \cdot k^{14}$
mercredi prochain	9	$9,93 \cdot 10^4 \cdot k^{16}$

La seconde ligne du tableau permet de calculer $k = \sqrt[7]{\dfrac{42,3}{9,93}} = 1,230022$, soit un taux de croissance de 23%.

$\boxed{(5)}$

Année	Période (année)	population
1989	0	80000
1990	1	$80000 \cdot 1,05$
1991	2	$80000 \cdot (1,05)^2$
...	...	...
1989+x	x	$80000 \cdot (1,05)^x$

Il reste à résoudre l'équation $100000 = 80000 \cdot (1,05)^x \Leftrightarrow 1,25 = (1,05)^x$

$\boxed{(6)}$

Période (année)	Valeur (€)
0	V
1	$V \cdot 0,8$
2	$V \cdot (0,8)^2$
...	...
x	$V \cdot (0,8)^x$

Il faut résoudre l'équation $V \cdot (0,8)^x = V \cdot (0,2) \Leftrightarrow (0,8)^x = 0,2$

$\boxed{(7)}$

Période (jour)	Masse (g)
0	10
1	$10 \cdot k$
2	$10 \cdot k^2$
...	...
138	$10 \cdot k^{138} = 5$

La dernière ligne du tableau permet de calculer $k = \sqrt[138]{0,5}$.
Il reste à résoudre l'équation $10 \centerdot k^x = 0,1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[138]{0,5}\right)^x = 0,01$

$\boxed{(8)}$

Période (année)	Consommation
0	C
1	$C \centerdot k$
2	$C \centerdot k^2$
...	...
7	$C \centerdot k^7 = 2C$

La dernière ligne du tableau permet de calculer $k = \sqrt[7]{2}$.
Le rapport entre les consommations de 2 années consécutives est le coefficient k ; le taux d'accroissement vaut t=k-1=10,4%.

$\boxed{(9)}$

Période (année)	Capital 1 (€)	Capital 2 (€)
0	500	6000
1	$500 \centerdot (1,08)$	$6000 \centerdot (1,06)$
2	$500 \centerdot (1,08)^2$	$6000 \centerdot (1,06)^2$
...	...	...
x	$500 \centerdot (1,08)^x$	$6000 \centerdot (1,06)^x$

Il faut calculer x pour que $500 \centerdot (1,08)^x = 6000 \centerdot (1,06)^x$, soit $\dfrac{(1,08)^x}{(1,06)^x} = 12 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1,08}{1,06}\right)^x = 12$

$\boxed{(10)}$
La production en fonction de l'année x vaut $500000(0,9)^x$. Il faut calculer x pour que $500000(0,9)^x < 10000 \Leftrightarrow (0,9)^x < 0,02$

$\boxed{(11)}$

1. Si t est le taux de décroissance annuelle, la consommation de la 10^e année vaut $100 \centerdot 10^6(1-t)^{10}$ qui doit être égale à $10 \centerdot 10^6$. Il faut donc résoudre l'équation $(1-t)^{10} = 0,01$, soit $t = 1 - \sqrt[10]{0,1} = 20,56\%$
2. Si p est la période nécessaire, on a, successivement,

$$\begin{aligned} 100 \centerdot 10^6(1-t)^p &= 1 \centerdot 10^6 \\ 100 \centerdot 10^6 \left(\sqrt[10]{0.1}\right)^p &= 1 \centerdot 10^6 \\ \left(\sqrt[10]{0.1}\right)^p &= 0,01 \\ p &= 20 \end{aligned}$$

☺