Des équations paramétriques à une équation cartésienne

Les 3 équations paramétriques sont complètes

(On appelle équation complète une équation qui contient les 2 paramètres λ et μ).

<u>MÉTHODE</u>
On résout un sous-système de 2 équations où l'on considère les 2 paramètres λ et μ comme inconnues. Les 2 valeurs sont à introduire dans la troisième équation qui sera une équation cartésienne (elle ne contiendra plus que x, y et z).
Le choix des 2 équations peut se faire en fonction des coefficients les plus simples pour appliquer la méthode d'élimination de Gauss.

Soit $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu & \text{(E1)} \\ y = 1 - \lambda + \mu & \text{(E2)} \\ z = 1 + \lambda + \mu & \text{(E3)} \end{cases}$

Les équations E2 et E3 permettront une élimination rapide de l'inconnue λ par addition, et de μ par soustraction.

$$\begin{cases} y = 1 - \lambda + \mu & \text{(E2)} \rightarrow \text{E2-E3} \\ z = 1 + \lambda + \mu & \text{(E3)} \rightarrow \text{E2+E3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda = y - z \\ \quad 2\mu = y + z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = z - y \\ \quad \mu = \dfrac{1}{2}(y + z - 2) \end{cases}$$

En remplaçant ces 2 valeurs dans l'équation E1, celle-ci devient :
$x = 1 + z - y - \dfrac{1}{2}(y + z - 2)$
qui, après réarrangement, devient :

$$2x + 3y - z = 4$$

Une au moins des équations est incomplète

Exemple 1

Même principe que pour des équations complètes, mais la résolution est simplifiée si le sous-système 2x2 contient au moins une des équations incomplètes.

$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda + 2\mu \end{cases}$ On résout le sous-système formé des 2 premières équations

$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \dfrac{y}{2} + \mu \\ \lambda = \dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = x - \dfrac{y}{2} - 1 \\ \lambda = \dfrac{y}{2} \end{cases}$

A introduire dans la troisième équation, qui devient :

$z = 2 - \dfrac{y}{2} + 2\left(x - \dfrac{y}{2} - 1\right)$, soit

$$2x - \frac{3}{2}y - z = 0$$

Exemple 2

Soit $\pi \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \mu \\ z = 3 + 2\lambda - \mu \end{cases}$

Le sous-système formé des 2 premières équations fournit directement les valeurs de λ et de μ :

$\begin{cases} \mu = y \\ \lambda = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

à introduire dans la troisième équation, qui devient :

$$x - y - z = 3$$

Une des équations ne contient pas de paramètre

C'est la cas le plus simple, aucun calcul n'est nécessaire. L'équation sans paramètre est une équation cartésienne du plan.