

# Intersections de droites et de plans

---

Les intersections de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan sont les solutions de systèmes d'équations linéaires.

Avant de se lancer dans des calculs, il peut être intéressant d'étudier les vecteurs directeurs et les vecteurs normaux ; les critères de parallélisme et d'orthogonalité permettent de prévoir le type de résultat attendu.

## 1 Position relative de 2 droites

Il y a 4 cas de figure :

- (1) Les 2 droites sont sécantes,  $d_1 \cap d_2 = 1$  point. Le système correspondant a une solution unique.
- (2) Les 2 droites sont parallèles distinctes,  $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ . Le système correspondant est impossible.
- (3) Les 2 droites sont confondues,  $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$ . Le système correspondant a une infinité simple de solutions.
- (4) Les 2 droites sont gauches,  $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ . Le système correspondant est impossible.

### 1.1 les 2 droites sont données par des équations cartésiennes

$$d_1 \equiv \begin{cases} C1 \\ C2 \end{cases} \text{ et } d_2 \equiv \begin{cases} C3 \\ C4 \end{cases} \rightarrow d_1 \cap d_2 \equiv \begin{cases} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \end{cases} \text{ soit un système de 4 équations à 3 inconnues.}$$

### 1.2 les 2 droites sont données par des équations paramétriques

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \text{ et } d_2 \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = -7 + \mu \end{cases}$$

Pour calculer  $d_1 \cap d_2$ , on égale les termes correspondants en  $x$ , en  $y$  et en  $z$  provenant des 2 systèmes ; on obtient un système de 3 équations à 2 inconnues  $\lambda$  et  $\mu$ .

Si le système a une solution unique, on remplace  $\lambda$  dans les équations de  $d_1$  ou  $\mu$  dans les équations de  $d_2$  pour calculer la coordonnée  $(x, y, z)$  de  $d_1 \cap d_2$ .

### 1.3 une droite est donnée par des équ. cartésiennes, l'autre par des équ. paramétriques

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} \text{ et } d_2 \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$$

$$d_1 \cap d_2 \equiv \begin{cases} 2(2 + \lambda) + 3(3 - \lambda) = 1 \\ 2(2 + \lambda) - (4 + 2\lambda) = 2 \end{cases}$$

c'est un système de 2 équations à 1 inconnue ; s'il y a une solution  $\lambda$ , on l'introduit dans les équations paramétriques de  $d_1$  pour calculer la coordonnée  $(x, y, z)$  de  $d_1 \cap d_2$ .

## 2 Position relative d'une droite et d'un plan

Il y a 3 cas de figure :

- (1) La droite est dans le plan,  $d \cap \pi = d$ . Le système correspondant a une infinité simple de solutions.
- (2) La droite et le plan sont parallèles distincts,  $d \cap \pi = \emptyset$ . Le système correspondant est impossible.
- (3) La droite et le plan sont sécants,  $d \cap \pi = 1$  point (appelé point de percée). Le système correspondant a une solution unique.

### 2.1 la droite et le plan sont donnés par des équations cartésiennes

$$d \equiv \begin{cases} C1 \\ C2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi \equiv C3 \quad \rightarrow \quad d \cap \pi \equiv \begin{cases} C1 \\ C2 \\ C3 \end{cases}$$

c'est un système de 3 équations à 3 inconnues. Si le système possède une solution unique, c'est la coordonnée du point d'intersection.

### 2.2 la droite est donnée par des équ. cartésiennes et le plan par des équ. paramétriques

$$d \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2z = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = 3 - \lambda + 2\mu \\ z = 4 - 2\lambda - 3\mu \end{cases}$$

On introduit les équations de  $\pi$  dans les équations de  $d$ .

$$d \cap \pi \equiv \begin{cases} 2(1 + 2\lambda - \mu) + 3(3 - \lambda + 2\mu) = 4 \\ (1 + 2\lambda - \mu) - 2(4 - 2\lambda - 3\mu) = 5 \end{cases}$$

c'est un système de 2 équations à 2 inconnues. Si le système a une solution unique, on remplace les valeurs de  $\lambda$  et de  $\mu$  dans les équations paramétriques du plan, ce qui donne la coordonnée du point d'intersection.

### 2.3 la droite est donnée par des équ. paramétriques et le plan par une équ. cartésienne

$$d \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi \equiv 3x - 2y + z = 6$$

On introduit les équations de  $d$  dans l'équation de  $\pi$

$$d \cap \pi \equiv 3(2 + 3\lambda) - 2(6 - \lambda) + (7 + 2\lambda) = 6$$

soit une équation du premier degré à 1 inconnue. Si elle possède une solution  $\lambda$ , on l'introduit dans les équations de  $d$ , ce qui donne la coordonnée du point d'intersection.

## 2.4 la droite et le plan sont donnés par des équ. paramétriques

$$d \equiv \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 6 - k \\ z = 7 + k \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi \equiv \begin{cases} x = 4 + 2\lambda - \mu \\ y = 7 - \lambda + 3\mu \\ z = 6 - \lambda + \mu \end{cases}$$

Pour calculer  $d \cap \pi$ , on égale les termes correspondants en  $x$ , en  $y$  et en  $z$  provenant des 2 systèmes.

$$d \cap \pi \equiv \begin{cases} 2 + 3k = 4 + 2\lambda - \mu \\ 6 - k = 7 - \lambda + 3\mu \\ 7 + k = 6 - \lambda + \mu \end{cases}$$

c'est un système de 3 équations à 3 inconnues. Si le système a une solution unique, on remplace soit  $k$  dans les équations de  $d$ , soit  $\lambda$  et  $\mu$  dans les équations de  $\pi$  pour calculer la coordonnée  $(x, y, z)$  du point d'intersection.

## 3 Position relative de 2 plans

Il y a 3 cas de figure :

- (1) Les 2 plans sont parallèles confondus,  $\alpha \cap \pi = \alpha = \pi$ . Le système correspondant a une infinité double de solutions.
- (2) Les 2 plans sont parallèles distincts,  $\alpha \cap \pi = \emptyset$ . Le système correspondant est impossible.
- (3) Les 2 plans sont sécants,  $\alpha \cap \pi = 1$  droite. Le système correspondant a une infinité simple de solutions.

Dans tous les cas, il n'y a pas de solution unique ; il faudra donc s'attendre à devoir choisir une inconnue pour calculer les autres.

### 3.1 les 2 plans sont donnés par une équ. cartésienne

$$\pi \equiv C1 \quad \text{et} \quad \alpha \equiv C2$$

$$\alpha \cap \pi \equiv \begin{cases} C1 \\ C2 \end{cases}$$

c'est un système de 2 équations à 3 inconnues.

### 3.2 1 plan est donné par une équ. cartésienne, l'autre par des équ. paramétriques

On peut transformer les équations paramétriques en équation cartésienne, puis résoudre le système de 2 équations à 3 inconnues.

Si les 2 plans sont sécants, ce système représente des équations cartésiennes de la droite d'intersection.

On peut aussi introduire les équations paramétriques dans l'équation cartésienne :

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 4 + 2\lambda - \mu \\ y = 7 - \lambda + 3\mu \\ z = 6 - \lambda + \mu \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha \equiv 2x + 3y - z = 4$$

$$\alpha \cap \pi \equiv 2(4 + 2\lambda - \mu) + 3(7 - \lambda + 3\mu) - (6 - \lambda + \mu) = 4$$

on obtient une équation à 2 inconnues; l'une est choisie, l'autre calculée; on introduit les 2 valeurs dans les équations paramétriques pour trouver 1 solution particulière (1 point de la droite d'intersection).

### 3.3 les 2 plans sont donnés par des équ. paramétriques

On peut transformer les équations paramétriques en équation cartésienne, puis résoudre le système de 2 équations à 3 inconnues.

Si les 2 plans sont sécants, ce système représente des équations cartésiennes de la droite d'intersection.

On peut aussi évaluer les termes correspondants en  $x$ , en  $y$  et en  $z$  des 2 systèmes d'équations paramétriques, pour obtenir un système de 3 équations à 4 inconnues.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 4 + 2\lambda - \mu \\ y = 7 - \lambda + 3\mu \\ z = 6 - \lambda + \mu \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha \equiv \begin{cases} x = 5 + 3k - p \\ y = 1 - k + 6p \\ z = 1 + 2k + 3p \end{cases}$$

$$\alpha \cap \pi \equiv \begin{cases} 5 + 3k - p = 4 + 2\lambda - \mu \\ 1 - k + 6p = 7 - \lambda + 3\mu \\ 1 + 2k + 3p = 6 - \lambda + \mu \end{cases}$$

Après simplification, on choisit une des 4 inconnues et on calcule les 3 autres.

Chaque couple  $(\lambda, \mu)$  ou  $(k, p)$  introduit dans ses équations respectives permettra de calculer la coordonnée d'un point de la droite d'intersection.