QUESTION 1

Le nombre de composants en état de fonctionner (succès = le composant fonctionne) est une variable aléatoire binomiale (X) de paramètres $n = 10$ et $p = 0,8$.

(1) La moyenne d'une loi binomiale de paramètres n et p est le produit $n \cdot p$
la moyenne est donc ici $10 \cdot 0,8 = 8$

(2) $p(X = 7) = C_{10}^{7}\,(0,8)^7\,(0,2)^3 = 0,2013265...$

(3) tous en panne $\Leftrightarrow$ aucun ne fonctionne
$p(X = 0) = C_{10}^{0}\,(0,8)^0\,(0,2)^{10} = 0,0000001024...$

QUESTION 2

Notons X la loi normale de paramètres $\mu = 200$ et $\sigma = 40$ et $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ la loi centrée réduite de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$

(1) (a)
$$\begin{aligned} p(X \geqslant 250) &= p\Big(Z \geqslant \frac{250-200}{40}\Big) = p(Z \geqslant 1,25) \\ &= 1 - p(Z \leqslant 1,25) \\ &= 1 - 0,89435 = 0,10565 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} p(X \leqslant 100) &= p\Big(Z \leqslant \frac{100-200}{40}\Big) = p(Z \leqslant -2,5) \\ &= 1 - p(Z \leqslant 2,5) \\ &= 1 - 0,99379 = 0,00621 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} p(190 \leqslant X \leqslant 250) &= p\Big(\frac{190-200}{40} \leqslant Z \leqslant \frac{250-200}{40}\Big) \\ &= p(-0,25 \leqslant Z \leqslant 1,25) \\ &= p(Z \leqslant 1,25) - p(Z \leqslant -0,25) \\ &= p(Z \leqslant 1,25) - \Big(1 - p(Z \leqslant 0,25)\Big) \\ &= 0,89435 - \Big(1 - 0,59871\Big) = 0,49306 \end{aligned}$$

(2) On cherche dans la table a tel que $p(Z \leqslant a) = 0,8$
on trouve $a = 0,84$; c'est une valeur de Z.
Pour trouver la valeur de X correspondante (le poids de la tomate), il faut faire le changement de variable inverse $x = z\sigma + \mu = 0,84 \cdot 40 + 200 = 233,6\ g$

(3) On cherche $-a$ tel que $p(Z \leqslant -a) = 0,1$, soit dans la table a tel que $p(Z \leqslant a) = 0,9$
on trouve $a = 1,28$; c'est une valeur de Z.
Pour trouver la valeur de X correspondante (le poids de la tomate), il faut faire le changement de variable inverse $x = z\sigma + \mu = -1,28 \cdot 40 + 200 = 148,8\ g$

QUESTION 3

(1)

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(1,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(2) Il y a 36 résultats possibles, dont 6 correspondent à 2 numéros identiques, 18 à 2 numéros de parités différentes et 12 autres. On peut donc écrire

- p(perdre 10 €)$=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$
- p(perdre 5 €)$=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$
- p(gagner 15 €)$=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

(3) Un gain étant considéré positivement et une perte négativement, on a

k	-10	-5	15
$p(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

(4) Espérance de gain$=\sum k \cdot p(X=k) = -10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = -2,5$ €
L'espérance (la moyenne) étant négative, il n'est pas intéressant de jouer à ce jeu.

(1) 1 jeu est une épreuve de Bernouilli (perdre ou gagner); Y est composée de 15 épreuves consécutives indépendantes.

(2) Les paramètres sont $n = 15$ (le nombre de parties) et $p = \dfrac{1}{3}$ (la probabilité du succès).

(3) p(gagner au moins 1 fois) = 1 - p(perdre 15 fois) $= 1 - C_{15}^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{15} = 0,997716...$

QUESTION 4

$2e^{2x} + e^x - 3 = 0$ (équation du second degré en e^x)
$\Delta = 25$

- $e^x = \dfrac{-1+5}{4} = 1 \rightarrow x = 0$
- $e^x = \dfrac{-1-5}{4} = \dfrac{-3}{2} \rightarrow$ à rejeter

Sol $= \{0\}$

QUESTION 5

année	population
0	80000
1	$80000(1,045)$
2	$80000(1,045)^2$
...	...
x	$80000(1,045)^x$

Il faut calculer x pour que $80000(1,045)^x = 100000$
$1,045^x = \dfrac{100000}{80000} = 1,25$
$x = \log_{1,045} 1,25 = \dfrac{\log 1,25}{\log 1,045} = 4,88$ années.