Une approche du nombre e

Croissance et décroissance exponentielle

Une quantité Q est soumise à une croissance exponentielle lorsque, à chaque *période*, elle augmente d'un taux t (appelé taux de croissance).
Si on note Q_0 la quantité initiale et Q_p la quantité à la période p, on a

$$\boxed{Q_p = Q_0\left(1+t\right)^p}$$

Une quantité Q est soumise à une décroissance exponentielle lorsque, à chaque *période*, elle diminue d'un taux t.

$$\boxed{Q_p = Q_0\left(1-t\right)^p}$$

Remarquons qu'un taux s'exprime habituellement en %, et qu'un taux de 5% représente le nombre réel 0.05.
Si Q représente un montant en euros, il est appelé *capital* et t le *taux d'intérêt*. Les formules ci-dessus se démontrent aisément :
$Q_1 = Q_0 \pm Q_0 * t = Q_0\left(1 \pm t\right)$
$Q_2 = Q_1 \pm Q_1 * t = Q_1\left(1 \pm t\right) = Q_0\left(1 \pm t\right)^2$
etc...
Le tableau ci-dessous montre que si les *périodes* forment une suite arithmétique de raison 1, alors les *quantités* forment une suite géométrique de raison $\left(1 \pm t\right)$.

période	quantité
0	$Q_0\left(1 \pm t\right)^0$
1	$Q_1 = Q_0\left(1 \pm t\right)^1$
2	$Q_2 = Q_0\left(1 \pm t\right)^2$
...	...
p	$Q_p = Q_0\left(1 \pm t\right)^p$

Taux proportionnel pour une sous-période

Le taux proportionnel consiste à diviser le taux d'une période p par le nombre k de sous-périodes. Il permet de simplifier de manière très acceptable le taux réel.

$$\boxed{t \text{ taux période } p \Leftrightarrow \frac{t}{k} \text{ taux période } \frac{p}{k}}$$

t taux annuel $\Leftrightarrow$ $\frac{t}{2}$ taux semestriel $\Leftrightarrow$ $\frac{t}{12}$ taux mensuel $\Leftrightarrow$ $\frac{t}{52}$ taux hebdomadaire $\Leftrightarrow$ $\frac{t}{365}$ taux journalier

Taux réel

Soit t le taux pour une période p, k le nombre de sous-périodes, et x le taux réel pour une sous-période. (le taux proportionnel vaut x=$\frac{t}{k}$)
Le tableau ci-dessous permet de comprendre le lien entre x et t.
On notera sp_i la i^e sous-période.

période	quantité
0	Q
sp_1	$Q\big(1+x\big)$
sp_2	$Q\big(1+x\big)^2$
...	...
$sp_k = 1$	$Q\big(1+x\big)^k = Q\big(1+t\big)^1$

Après simplification par Q quantité initiale non nulle, on a :

$$\big(1+x\big)^k = 1+t$$

$$1+x = \sqrt[k]{1+t}$$

$$x = \sqrt[k]{1+t} - 1$$

Pour des valeurs "petites" de t, on a $\sqrt[k]{1+t} - 1 \approxeq \frac{t}{k}$
Si t=5% (taux annuel), k=12 (taux mensuel), le taux proportionnel vaut 0,4167% tandis que le taux réel vaut 0,4074%.

Un placement idéal

On place un capital de 1 euro pendant 1 année à un taux d'intérêt annuel de 100%. Si Q_p représente le capital après p périodes, alors on peut écrire : $Q_p = Q_0\left(1+1\right)^p$

Capitalisation annuelle

$Q_{1an} = 1\left(1+1\right)^1 = 2$

Capitalisation semestrielle

$Q_{6mois} = 1\left(1+\frac{1}{2}\right)^1$

$Q_{1an} = 1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$

Capitalisation mensuelle

$Q_{1mois} = 1\left(1+\frac{1}{12}\right)^1$

$Q_{2mois} = 1\left(1+\frac{1}{12}\right)^2$

$Q_{3mois} = 1\left(1+\frac{1}{12}\right)^3$

...

$Q_{1an} = 1\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2,613035$

Capitalisation hebdomadaire

$Q_{1sem} = 1\left(1+\frac{1}{52}\right)^1$

$Q_{2sem} = 1\left(1+\frac{1}{52}\right)^2$

$Q_{3sem} = 1\left(1+\frac{1}{52}\right)^3$

...

$Q_{1an} = 1\left(1+\frac{1}{52}\right)^{52} = 2,692596$

Capitalisation journalière

$Q_{1jour} = 1\left(1+\frac{1}{365}\right)^1$

$Q_{2jour} = 1\left(1+\frac{1}{365}\right)^2$

$Q_{3jour} = 1\left(1+\frac{1}{365}\right)^3$

...

$Q_{1an} = 1\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2,714567$

Capitalisation à la seconde

Il y a 31536000 secondes dans 1 année

$Q_{1sec} = 1\left(1+\frac{1}{31536000}\right)^1$

$Q_{2sec} = 1\left(1+\frac{1}{31536000}\right)^2$

$Q_{3sec} = 1\left(1+\frac{1}{31536000}\right)^3$

...

$Q_{1an} = 1\left(1+\frac{1}{31536000}\right)^{31536000} = 2,7182816$

On peut continuer ainsi par dixième de seconde, par centième de seconde, ..., et remarquer que la suite des nombres $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tend vers 2,71828... lorsque x tend vers l'infini.
Ce nombre est noté e (nombre d'$EULER$) et on écrit :

$$\boxed{e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$