Nom, Prénom, Classe : ______________________________ ...... / 30

J.M. Desbonnez

Mathématique (4p/sem)
Analyse combinatoire

int-combin-0708-1

Date : jeudi 29/11
Classe(s) : 6B-6E-6F-6G
Nb élèves : 70
Nb pages : 2

Matériel autorisé:
calculatrice (graphique ou non)

Remettre le questionnaire avec votre nom.
Remettre une copie propre.
Séparer chaque réponse par un trait horizontal.

Question 1 (6 pts)

Définir les 3 types de listes suivantes; pour chacune d'elle, donner un exemple et expliquer.

(1) Arrangement simple

(2) Combinaison simple

(3) Permutation à répétition

Question 2 (2 pts)

Simplifier l'expression suivante : $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!n}$

Question 3 (2 pts)

En supposant qu'une tenue de Mannenken Pis soit composée d'un couvre-chef, d'une veste et d'un pantalon, et que la ville de Bruxelles souhaite l'habiller tous les jours de l'année de manière différente, calculer un nombre minimum de couvre-chefs, de pantalons et de vestes nécessaires à cet effet.
Donner la réponse sous la forme $\cdots$ couvre-chefs, $\cdots$ pantalons, $\cdots$ vestes.

Question 4 (2 pts)

Les mots de passe de la salle d'informatique sont composés de 6 caractères : consonne, voyelle, consonne, voyelle, chiffre 1, chiffre 2. Combien de codes distincts existe-t-il ?

Question 5 (2 pts)

Combien de mots distincts peut-on former à l'aide des lettres T, I, N, E, E, S, N, I ?
L'un de ces mots est célèbre. Lequel ?

Question 6 (4 pts)

Une grille de l'euro-million est composée de 5 nombres distincts compris entre 1 et 50, et de 2 nombres distincts (les étoiles) compris entre 1 et 9.
Calculer la probabilité de gagner avec 3 bons numéros et 1 étoile ?
Expliquer.

Question 7 (6 pts)

Une urne contient 10 boules distinctes numérotées. De combien de manières peut-on prélever :

(1) Successivement 4 boules sans remise des boules extraites ?

(2) Successivement 4 boules avec remise des boules extraites ?

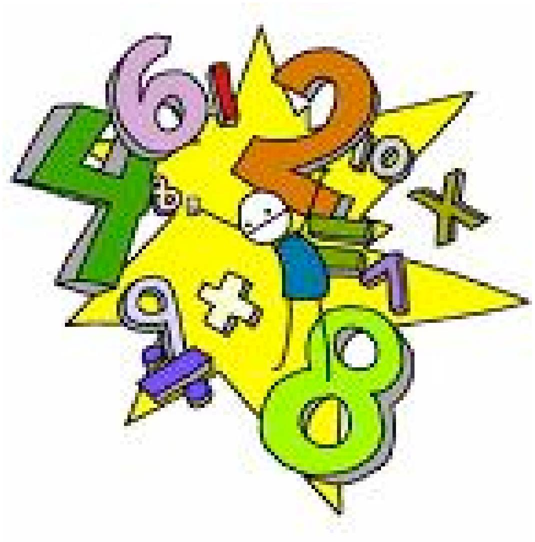
(3) Simultanément 4 boules ?

Question 8 (2 pts)

Il y a 14 délégués de rhéto. De combien de manières peut-on choisir parmi eux Saint Nicolas, Nicodème et l'âne ?

Question 9 (4 pts)

Un cube dont toutes les faces sont blanches est collé au mur. Pour lui donner des aspects différents, on peint en noir 0, 1 ou plusieurs faces.
Combien d'aspects différents peut-on lui donner ? (développer, expliquer, ...)



QUESTION 1

Voir notes.

QUESTION 2

$$\frac{(n+1)!}{n(n-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = (n+1)(n-1)$$

QUESTION 3

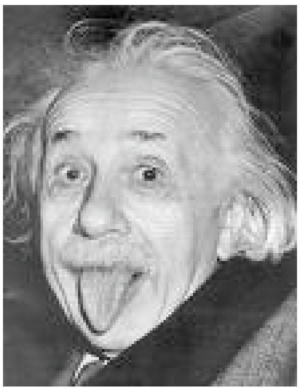
Si on note x le nombre de couvre-chefs, y le nombre de vestes et z le nombre de pantalons, le nombre de tenues différentes vaut $x \cdot y \cdot z$.
Il y a 365 jours dans l'année, il faut donc que $x \cdot y \cdot z = 365$.
Les seuls diviseurs de 365 sont 1, 5, 73, et 365.
On peut donc avoir comme réponses 1, 1, 365, ou 1, 5, 73, l'ordre des valeurs de x, y et z n'ayant pas d'importance dans un produit.

QUESTION 4

Les caractères et les chiffres peuvent se répéter, la place des caractères est importante ; il s'agit donc d'arrangements à répétition :
$20 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 = 20^2 \cdot 6^2 \cdot 10^2 = 1444000$
On a utilisé le fait qu'il y a souvent 20 consonnes et 6 voyelles.

QUESTION 5

Il y a 8 caractères, dont 3 se répètent 2 fois ; l'ordre des caractères dans un mot est important ; il s'agit donc d'une permutation à répétition.
Il y a $\frac{8!}{2!2!2!}$ mots distincts (5040) dont EINSTEIN.



QUESTION 6

L'ordre des nombres n'a pas d'importance, ils sont tous distincts ; il s'agit donc de combinaisons simples.
Chaque grille est composée de 5 nombres (sur 50) et de 2 nombres (sur 7) ; il y en a donc au total $C_{50}^{5} \cdot C_{9}^{2}$
Une grille de 3 bons numéros et 1 étoile est composée de 3 nombres (sur 5) et de 2 nombres (sur 45) et de 1 nombre (sur 2) et de 1 nombre (sur 7) ; il y en a donc $C_{5}^{3} \cdot C_{45}^{2} \cdot C_{2}^{1} \cdot C_{7}^{1}$
La probabilité d'obtenir une telle grille est $\dfrac{C_{5}^{3} \cdot C_{45}^{2} \cdot C_{2}^{1} \cdot C_{7}^{1}}{C_{50}^{5} \cdot C_{9}^{2}} = \dfrac{138600}{76275360} = 0,00181710057$

QUESTION 7

(1) "Successivement" implique l'ordre, "sans remise" implique des boules nécessairement distinctes ; il s'agit donc d'arrangements simples $A_{10}^{4} = 5040$
(2) "Avec remise" implique des boules éventuellement identiques ; il s'agit donc d'arrangements à répétition $10^4 = 10000$
(3) "Simultanément" implique sans ordre, les boules sont nécessairement distinctes ; il s'agit donc de combinaisons simples $C_{10}^{4} = 210$

QUESTION 8

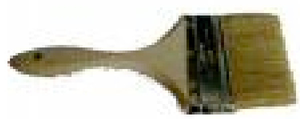
Les 3 éléments sont distincts, et l'ordre est important puisque chacun à un rôle ; il s'agit donc d'arrangements simples $A_{14}^{3} = 2184$

QUESTION 9

On peut peindre 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 faces, la sixième étant fixée au mur.
L'ordre dans lequel on peint les faces n'a pas d'importance.
Le nombre total d'aspects est le nombre d'aspects avec 0 face peinte + le nombre d'aspects avec 1 face peinte + $\cdots$ + le nombre d'aspects avec 5 faces peintes.

faces peintes	0	1	2	3	4	5
aspects	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5

$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$



Il ne faut pas s'emmêler les pinceaux, et surtout ne pas oublier de le nettoyer.

Nom, Prénom, Classe : ________________________________ ...... / 45

C1 : savoir, connaître, définir	C2 : appliquer	C3 : résoudre des problèmes
.... / 15	.... / 24	.... / 6

J.M. Desbonnez

Mathématique (4p/sem)
Analyse combinatoire

int-combin-0809-1

Date : 06/10/08
Classe(s) : 6A - 6B - 6F
Nb élèves : 63
Nb pages : 2

Matériel autorisé:
calculatrice (graphique ou non)

Remettre le questionnaire avec votre nom.
Remettre une copie propre.
Séparer chaque réponse par un trait horizontal.
Pour chaque exercice, il faut la réponse chiffrée.

Question 1 C1 (6 pts)

Donner une définition (en français)

(1) d'une combinaison simple de 5 objets choisis parmi 7.

(2) d'un arrangement à répétition de 5 objets choisis parmi 7.

Question 2 C1 (4 pts)

Donner la formule du binôme de Newton pour la puissance d'une somme et d'une différence.

Question 3 C1 (5 pts)

Démontrer que $C_A^B = C_{A-1}^{B-1} + C_{A-1}^{B}$ (ne pas oublier les conditions d'existence !)
Où utilise-t-on cette propriété?

Question 4 C2 (6 pts)

Une urne contient 7 boules de couleurs distinctes. De combien de manières peut-on prélever

(1) 5 boules successivement et sans remise?

(2) 5 boules simultanément?

(3) 5 boules successivement et avec remise?

Question 5 C2 (2 pts)

Parmi tous les nombres de 4 chiffres distincts non nuls, combien ne contiennent ni 3 ni 7 ?

Question 6 C2 (2 pts)

Au loto français, une grille est composée de 6 nombres distincts choisis parmi 1, 2, ..., 49. Combien y-a-t-il de grilles gagnantes comportant 4 bons numéros?

Question 7 C2 (2 pts)

De combien de manières peut-on ranger 6 paires de chaussettes distinctes dans 3 tiroirs, sachant qu'on peut mettre plusieurs paires dans un tiroir ?

Question 8 C2 (6 pts)

Parmi toutes les mains de 8 cartes extraites d'un jeu de 32, combien contiennent

(1) 3 rois, 2 dames et 1 as ?

(2) au moins 1 as ?

Question 9 C2 (3 pts)

Un entomologiste veut classer 13452 espèces d'insectes en attribuant à chacune d'elle un code composé de 2 lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. A-t-il choisi correctement son code de classification ? Pourquoi ?

Question 10 C2 (3 pts)

Calculer le terme en A^7 dans le développement de $\left(A - \frac{B}{A}\right)^{13}$

Question 11 C3 (6 pts)

Un incendie à Bruxelles a détruit une partie des vêtements servant à habiller Mannenken Pis. Pour l'habiller, il faut impérativement 1 pantalon, une veste et un couvre-chef. On a pu sauver 5 pantalons, 7 vestes et 3 couvre-chefs (tous distincts).

(1) Combien reste-t-il de tenues distinctes?

La ville souhaite continuer à l'habiller tous les jours de l'année de manière différente.

(2) Si on n'achète que des pantalons, combien en faut-il?

(3) Si on achète des costumes complets (1 pantalon, 1 veste et 1 couvre-chef), combien en faut-il?

Il est bien entendu qu'on n'achète pas des morceaux de pantalon, de veste, de couvre-chef.

QUESTION 1

(1) Liste non ordonnée de 5 objets distincts choisis parmi 7 objets distincts.
(2) Liste ordonnée de 5 objets non nécessairement distincts choisis parmi 7 objets distincts.

QUESTION 2

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad \left(a-b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (-1)^k b^k$$

QUESTION 3

Voir livre page 141 (remplacer n par A et p par B).
Cette propriété est utilisée dans la construction du triangle de Pascal.

QUESTION 4

(1) $A_7^5 = 2520$
(2) $C_7^5 = 21$
(3) $7^5 = 16807$

QUESTION 5

Si on ne peut utiliser ni 3, ni 7, ni 0, il n'y a plus le choix qu'entre 7 chiffres ; il faut tenir compte de l'ordre des chiffres, d'où $A_7^4 = 840$

QUESTION 6

Il faut 4 bons numéros sur 6 et 2 autres sur 43, soit $C_6^4 \cdot C_{43}^2 = 13545$.

QUESTION 7

Il faut ranger la paire n°1 (3 choix) et la paire n°2 (3 choix) ... et la paire n°6 (3 choix), soit $3^6 = 729$ choix.

QUESTION 8

(1) 3 rois parmi 4 et 2 dames parmi 4 et 1 as parmi 4 et 2 autres cartes parmi 20
$C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_{20}^2 = 18240$

(2) $$\begin{aligned} \text{au moins 1 as } &= \text{toutes les possibilités sauf pas d'as} \\ &= C_{32}^8 - C_{28}^4 = 7410195 \end{aligned}$$

QUESTION 9

Nombre de codes possibles : $26 \cdot 25 \cdot 9 = 5850$.
Ce n'est pas suffisant pour classer 13452 espèces.

QUESTION 10

$$\left(A-\frac{B}{A}\right)^{13} = \sum_{i=0}^{13} C_{13}^{i} A^{13-i}\left(\frac{-B}{A}\right)^{i}$$
$$= \sum_{i=0}^{13} C_{13}^{i} A^{13-i}(-1)^{i}\frac{B^{i}}{A^{i}}$$
$$= \sum_{i=0}^{13} C_{13}^{i} A^{13-2i}(-1)^{i}B^{i}$$

$A^{13-2i} = A^7 \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 13-2i \quad \Leftrightarrow \quad i=3$

Le terme cherché vaut donc $C_{13}^{3}A^7B^3(-1)^3 = -286A^7B^3$.

QUESTION 11

(1) 1 tenue c'est 1 pantalon (5 choix) et 1 veste (7 choix) et 1 couvre-chef (3 choix), soit $5\cdot 7\cdot 3 = 105$ tenues (et donc 105 jours d'habits).

(2) Soit x le nombre de pantalons à acheter. Il faut résoudre l'inéquation

$$(5+x)\cdot 7\cdot 3 \geqslant 365$$
$$105+21x \geqslant 365$$
$$21x \geqslant 260$$
$$x \geqslant \frac{260}{21} = 12,38$$

soit 13 pantalons.

(3) Soit x le nombre de costumes à acheter. Il faut résoudre l'inéquation

$$(5+x)(7+x)(3+x) \geqslant 365$$

qui est du troisième degré, et donc difficile.
"Manuellement", il faut prendre $x=3$ pour dépasser 365.

Nom, Prénom, Classe : ____ ...... / 35

C1 : savoir, connaître, définir	C2 : appliquer	C3 : résoudre des problèmes
.... / 7	.... / 23	.... / 5

J.M. Desbonnez

Mathématique (4p/sem)
Analyse combinatoire

int-combin-0910

Date : 09/10/09
Classe(s) : 6A-25 élèves
: 6B-24 élèves
: 6C-28 élèves
Nb pages : 2

<u>Matériel autorisé</u>:
calculatrice (graphique ou non)

Remettre le questionnaire avec votre nom.
Remettre une copie propre.
Séparer chaque réponse par un trait horizontal.

Question 1 (C1 - 4 pts)

Définir (on ne demande pas la formule de dénombrement!) et donner un exemple.

1. Une permutation simple de 4 objets distincts.
2. Un arrangement à répétition de 4 objets choisis parmi 7 objets distincts.

Question 2 (C1 - 3 pts)

Donner la formule du binôme de Newton qui permet de développer

$$(x+y)^n$$

Question 3 (C3 - 5 pts)

Combien d'aspects différents peut-on donner à un tétraèdre (4 faces) fixé au mur, en peignant 0, 1, ... faces? Expliciter le raisonnement.

Question 4 (C2 - 3 pts)

1. Simplifier l'expression suivante :
$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!n}$$
2. Quelle est la condition sur n pour qu'elle ait un sens?

Question 5 (C2 - 4 pts)

Sur le banc 18 du parc Barbieux à Roubaix, il y a de la place pour 4 personnes (parfois il n'y en a que 2, mais cela n'intervient pas dans la question!). De combien de manières peut s'y asseoir une famille de 5 personnes

1. Si on ne tient pas compte de leur place sur le banc.
2. Si on tient compte de leur place sur le banc.

Question 6 (C2 - 8 pts)

Pour l'examen oral, le prof de math a rédigé 30 fiches de questions portant sur 4 matières : 10 en combinatoire, 12 en trigonométrie, 5 en géométrie et 3 en probabilités. Un étudiant doit tirer 4 questions au hasard.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles?
2. Quelle est la $p$robabilité de tirer
   (a) 4 questions de géométrie?
   (b) 1 question dans chaque chapitre?
   (c) 2 questions de combinatoire et 2 questions de probabilité?
   (d) au moins 1 question de trigonométrie?

Question 7 (C2 - 6 pts)

Parmi tous les nombres de 4 chiffres distincts non nuls, combien

1. sont divisibles par 5?
2. contiennent 3 mais ni 6 ni 7?
3. ne contiennent que des chiffres impairs?

Question 8 (C2 - 2 pts)

De combien de manières peut-on placer 7 personnes autour d'une table ronde?

QUESTION 1

1. Une liste ordonnée de ces 4 objets.
2. Une liste ordonnée de ces 4 objets avec répétition possible.

QUESTION 2

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

QUESTION 3

On peut distinguer les 3 faces visibles par leur position dans l'espace ; l'ordre de peinture n'intervient pas.
1 aspect $\iff$ peindre 0 face ou 1 face ou 2 faces ou 3 faces parmi les 3.
il y a donc $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8$ aspects différents.

QUESTION 4

1. $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!n} = \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)(n-3)\cdots 1} = (n-1)(n+1) = n^2 - 1$
2. Cette expression a un sens si $\begin{cases} n+1 \geqslant 0 \\ n+2 \geqslant 0 \\ n \geqslant 0 \end{cases}$ soit $n \geqslant 2$

QUESTION 5

1. Si on ne tient pas compte des places respectives, il suffit de choisir 4 personnes parmi les 5, soit $C_5^4 (= 5)$ possibilités.
2. Si on tient compte de la place de chacun, il y a
   – 5 manières de choisir 4 personnes (question 1)
   – 4! permutations possibles de ces 4 personnes
   Soit donc un total de $5 \cdot 4! (= 120)$ possibilités.

QUESTION 6

1. L'ordre des questions est sans importance, et toutes les fiches sont distinctes ; une liste de 4 questions est donc une combinaison simple de 4 éléments choisis parmi 30 éléments distincts.
   Il y a C_{30}^4 questionnaires possibles, soit 27405.
2. (a) Sur 5 questions de géométrie, il faut en prendre 4, ce qui fait C_5^4 possibilités, et donc une probabilité de $\dfrac{C_5^4}{C_{30}^4} = 0,0001824...$
   (b) Il faut 1 question de combinatoire (sur 10) et 1 question de trigo (sur 12) et 1 question de géom (sur 5) et 1 question de proba (sur 3), d'où $C_{10}^1 \cdot C_{12}^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 = 1800$ listes, et donc une probabilité de $\dfrac{1800}{27405} = 0,065481...$
   (c) Il faut 2 questions de combinatoire (sur 10) et 2 questions de proba (sur 3), d'où $C_{10}^2 \cdot C_3^2 = 135$ listes, et donc une probabilité de $\dfrac{135}{27405} = 0,0049261...$
   (d) Toutes les listes possibles sauf celles où il n'y a pas de trigonométrie (celles choisies parmi les 18 questions des autres chapitres), d'où $C_{30}^4 - C_{18}^4 = 24345$ listes, et donc une probabilité de $\dfrac{24345}{27405} = 0,88834......$

QUESTION 7

1. Divisible par 5 $\Leftrightarrow$ se terminant par 5.
   Le 5 étant placé, il ne reste plus que 8 chiffres utilisables.

			5

   $8 \cdot \quad 7 \cdot \quad 6 \cdot \quad 1$ soit $A_8^3 = 336$ nombres.
2. Le 3 étant placé, les 6 et 7 interdits, il ne reste que 6 chiffres à utiliser ; le 3 peut occuper 4 places distinctes.

3				ou		3			ou			3		ou				3

   $1 \cdot \quad 6 \cdot \quad 5 \cdot \quad 4$
   Soit un total de $4 \cdot A_6^3 = 480$ nombres.
3. Parmi 1, 2, ..., 9, il y a 5 chiffres impairs.

   $5 \cdot \quad 4 \cdot \quad 3 \cdot \quad 2$ soit $A_5^4 = 120$ nombres.

QUESTION 8

6! (voir notes).