De l'équation cartésienne aux équations paramétriques

Soit une équation cartésienne d'un plan $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$ où A, B, C ne sont pas nuls simultanément.
On distinguera le cas où l'équation est complète (A, B, C non nuls) et celui où l'équation est incomplète (A ou B ou C nul(s)).

Equation complète

Soit le plan $\pi \equiv 2x + 3y + 10z = 19$.
On peut résoudre cette équation en *choisissant* deux des inconnues et en *calculant* la troisième en fonction des deux premières. On peut ainsi :

1. choisir x et y, et calculer z ; on obtient $z = \dfrac{19 - 2x - 3y}{10}$
2. choisir x et z, et calculer y
3. choisir y et z, et calculer x

On peut ainsi écrire les solutions de l'équation sous la forme

$$\text{Sol} = \left\{ \left(x, y, \frac{19 - 2x - 3y}{10} \right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Changement de notations :
x étant un réel quelconque, notons-le λ (par tradition ... grecque) ; il représente l'abscisse d'un point du plan.
y étant un réel quelconque, non nécessairement égal à x, notons-le μ pour la même raison ; il représente l'ordonnée d'un point du plan.
z vaut alors $\dfrac{19 - 2\lambda - 3\mu}{10}$; il représente la hauteur d'un point du plan.

Le système $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \dfrac{19 - 2\lambda - 3\mu}{10} \end{cases}$ est appelé *système d'équations paramétriques du plan* π.

Il permet de calculer n'importe que point du plan en choisissant 2 paramètres réels. On peut ré-arranger le système en faisant apparaître les 2 paramètres dans *chaque* équation :

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu + 0 \\ y = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu + 0 \\ z = \dfrac{-2}{10} \cdot \lambda + \dfrac{-3}{10} \cdot \mu + \dfrac{19}{10} \end{cases}$$

Cette notation a comme avantage de faire apparaître visuellement :

(1) un point du plan : $\left(0, 0, \dfrac{19}{10}\right)$

(2) deux vecteurs directeurs : $\left(1, 0, \dfrac{-2}{10}\right)$ et $\left(0, 1, \dfrac{-3}{10}\right)$

Equation incomplète, 2 variables

Soit le plan $\pi \equiv 2x + 3y = 19$. On sait (devrait savoir) que π est parallèle à l'axe OZ.
L'équation peut s'écrire sous la forme $\pi \equiv 2x + 3y + 0z = 19$.
z peut prendre n'importe quelle valeur réelle (car multiplié par 0) ; on choisit x (par exemple) et on calcule y en fonction de x :

$$y = \frac{19 - 2x}{3}$$

On peut ainsi écrire les solutions de l'équation sous la forme

$$\text{Sol} = \left\{ \left(x, \frac{19 - 2x}{3}, z\right) \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Les équations paramétriques peuvent alors s'écrire

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \dfrac{19 - 2\lambda}{3} \\ z = \mu \end{cases}$$

Après réarrangement, il vient

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu + 0 \\ y = \dfrac{-2}{3} \cdot \lambda + 0 \cdot \mu + \dfrac{19}{3} \\ z = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu + 0 \end{cases}$$

Deux vecteurs directeurs sont : $\left(1, \dfrac{-2}{3}, 0\right)$ et $(0, 0, 1)$
$(0, 0, 1)$ étant un vecteur sur l'axe OZ.

Equation incomplète, 1 variable

Soit le plan $\pi \equiv 2x = 19$. On sait (devrait savoir) que π est parallèle au plan YOZ.
L'équation peut s'écrire sous la forme $\pi \equiv 2x + 0y + 0z = 19$.
y et z peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle (car multiplié par 0) ; on ne sait qu'écrire :

$$x = \frac{19}{2}$$

Les solutions de l'équation ont la forme

$$\text{Sol} = \left\{ \left(\frac{19}{2}, y, z \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Les équations paramétriques s'écrivent

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \frac{19}{2} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Après réarrangement, il vient

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu + \frac{19}{2} \\ y = 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu + 0 \\ z = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu + 0 \end{cases}$$

Deux vecteurs directeurs sont : $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, soit 2 vecteurs dans le plan YOZ, ce qui confirme que le plan π est bien parallèle au plan YOZ.