Aire sous une courbe et calcul de primitives

Le calcul de primitives d'une fonction et celui de l'aire de la surface bordée par le graphique de cette fonction sont intimement liés.
Les exemples qui suivent ont pour but de mettre ce lien en évidence avec des figures bien connues (voir cours de "formes géométriques" à l'école primaire).
Ensuite on va conjecturer pour le cas général, et mettre en évidence une méthode de calcul approché d'une aire par découpages en "tranches rectangulaires".

Exemple 1

Soit la fonction $f(x) = 5$ sur l'intervalle $[1, 3]$.
Calculons l'aire de la surface délimitée par

- le graphique de $f(x)$
- l'intervalle $[1, 3]$ sur l'axe des abscisses
- les 2 droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$

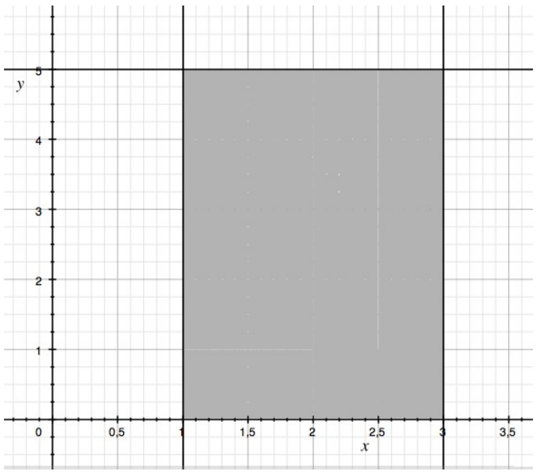


FIG. 1 – Exemple 1

La surface hachurée est un rectangle de côtés respectifs 5 et 2 ; l'aire vaut $\boxed{10}$ unités d'aire (noté U.A.).
L'unité d'aire peut-être aisément représentée sur la graphique ci-dessus. (A faire)

Calculons : $F(x) = \int f(x)\,dx = \int 5\,dx = 5x + C$

$$F(3) = 15 + C$$
$$F(1) = 5 + C$$
$$F(3) - F(1) = \boxed{10}$$

Exemple 2

Soit la fonction $f(x) = x + 1$ sur l'intervalle $[1, 3]$.
Calculons l'aire de la surface délimitée par

- le graphique de $f(x)$

- l'intervalle $[1, 3]$ sur l'axe des abscisses

- les 2 droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$

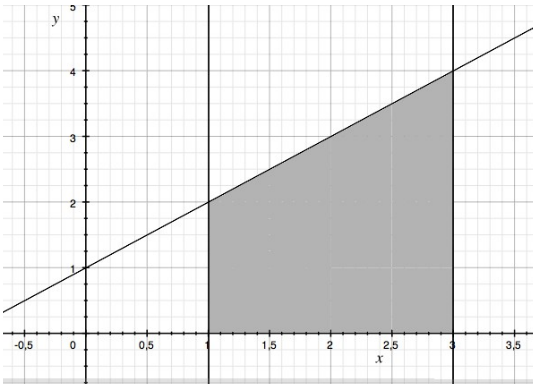


FIG. 2 – Exemple 2

La surface hachurée est un trapèze dont l'aire vaut $\boxed{6}$ U.A.

$$\text{Calculons : } F(x) = \int f(x)\,dx = \int x + 1\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$
$$F(3) = \frac{15}{2} + C$$
$$F(1) = \frac{3}{2} + C$$
$$F(3) - F(1) = \boxed{6}$$

Exemple 3

Soit la fonction $f(x) = x - 1$ sur l'intervalle $[1, 3]$.
Calculons l'aire de la surface délimitée par

- le graphique de $f(x)$

- l'intervalle $[1, 3]$ sur l'axe des abscisses

- les 2 droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$

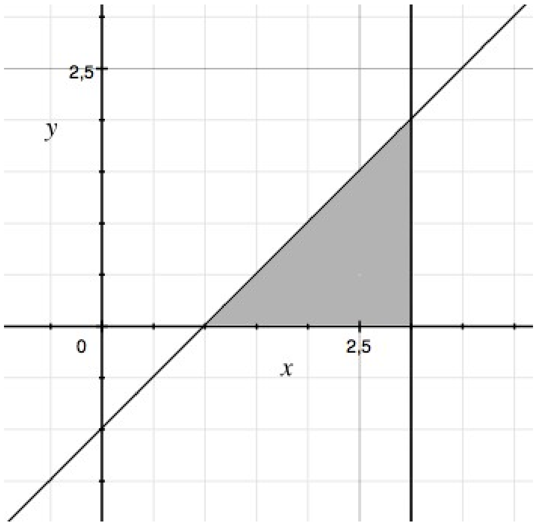


FIG. 3 – Exemple 3

La surface hachurée est un triangle rectangle dont l'aire vaut $\boxed{2}$ U.A.

Calculons : $F(x) = \int f(x)\,dx = \int x - 1\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$

$$F(3) = \frac{3}{2} + C$$

$$F(1) = \frac{-1}{2} + C$$

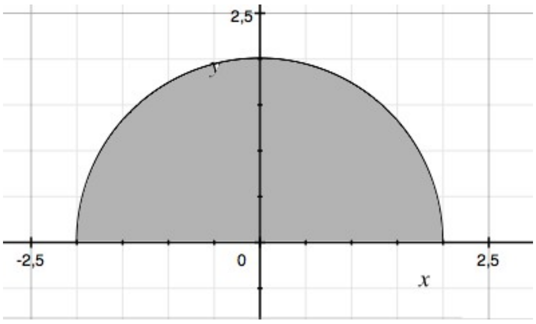
$$F(3) - F(1) = \boxed{2}$$

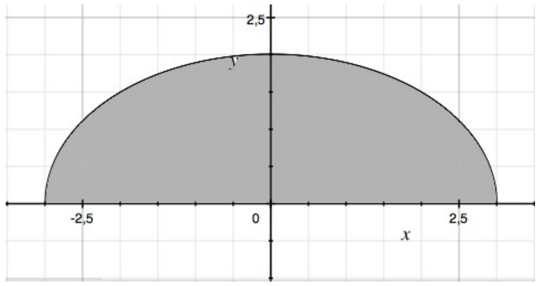
Remarques

(1) Nous n'avons traité que des exemples sur la partie *positive* des fonctions envisagées ; les autres cas seront traités par la suite.

(2) *Le choix des fonctions* : ces 3 exemples ne font intervenir que des fonctions constantes (ex 1) ou des fonctions du premier degré (ex 2&3) dont les graphique sont des droites. Si on veut appliquer les formules d'aires simples du cours de "formes géométriques", on ne peut utiliser que des bords rectilignes.

(3) *Le cas du cercle, de l'ellipse* :





Pour ces surfaces, il existe également une formule (bien) connue pour calculer l'aire. Les fonctions dont le graphique détermine ces surfaces sont des fonctions irrationnelles, pour lesquelles le calcul des primitives n'est pas simple.
La vérification n'est donc pas aisée ... pour l'instant, mais çà viendra !

(4) *Le choix de l'intervalle* $[1, 3]$: il suffit d'essayer avec un autre ...

Exemple 4

Et on fait le grand saut ...
Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1, 3]$.
Calculons l'aire de la surface délimitée par

- le graphique de $f(x)$
- l'intervalle $[1, 3]$ sur l'axe des abscisses
- les 2 droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$

FIG. 4 – Exemple 4

La surface hachurée n'est pas une figure géométrique usuelle pour laquelle il existe une formule simple de calcul de l'aire.

Calculons : $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$$F(3) = \ln 3 + C$$
$$F(1) = \ln 1 + C$$
$$F(3) - F(1) = \ln 3 - \ln 1 = \boxed{\ln 3} = 1.09861228867...$$

Comment vérifier ?

On peut démontrer une formule (le théorème fondamental du calcul intégral et la formule de Leibniz). On peut aussi, de manière assez simple, calculer une valeur approchée de l'aire cherchée :
on découpe la surface en "tranches rectangulaires" pour lesquelles il est facile de calculer l'aire (base × hauteur...) ; en additionnant les aires de ces rectangles, on obtient une valeur approchée de l'aire cherchée.
Si les rectangles sont "sous la courbe", on a une *valeur approchée par défaut* ; si les

rectangles sont "au-dessus" de la courbe, on a une *valeur approchée par excès.*
Il est dès lors facile de comprendre que

$$\text{aire par défaut} \leqslant \text{aire exacte} \leqslant \text{aire par excès}$$

Aire par défaut

On décide de découper l'intervalle $[1, 3]$ en 5 parties égales
de largeur $\Delta x = \dfrac{3-1}{5} = \dfrac{2}{5} = 0,4$
de hauteur $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $x = 1,4$ puis $1,8$.... On calcule facilement :

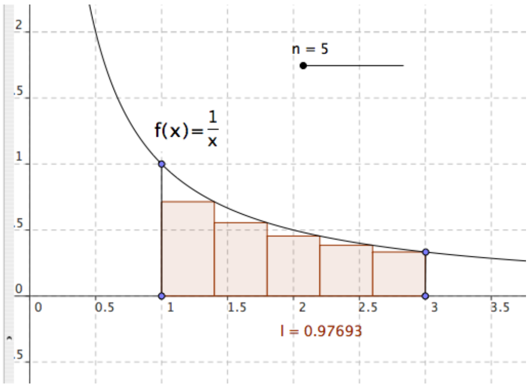
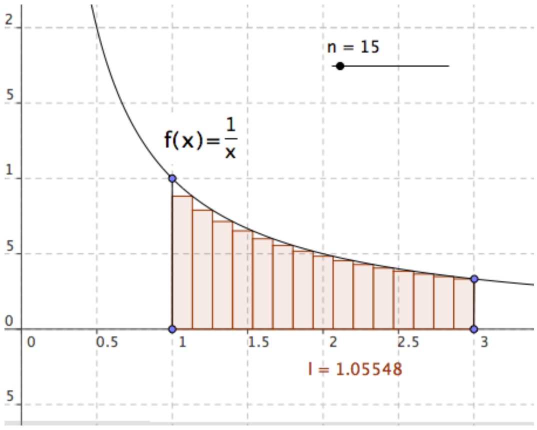


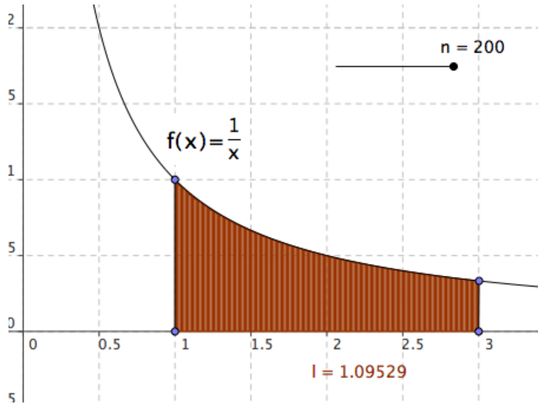
FIG. 5 – 5 rectangles sous la courbe

aire rectangle 1 $= f(x_1) \cdot \Delta x = f(1,4) \cdot 0,4 = \dfrac{1}{1,4} \cdot 0,4$
aire rectangle 2 $= f(x_2) \cdot \Delta x = f(1,8) \cdot 0,4 = \dfrac{1}{1,8} \cdot 0,4$
....
aire rectangle 5 $= f(x_5) \cdot \Delta x = f(3) \cdot 0,4 = \dfrac{1}{3} \cdot 0,4$

L'aire totale peut s'écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x$ avec $x_i = 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3$ et vaut $0,97693$...

Il est facile de comprendre que pour avoir une meilleure approximation, il faut augmenter le nombre de rectangles, et donc de diminuer Δx.
Ci dessous les valeurs obtenues pour 15 rectangles et pour 200 rectangles. En pratique, ces calculs sont simples en utilisant un tableur.





Pour $n = 15$, l'aire approchée est $1,05548$
Pour $n = 200$, l'aire approchée est $1,09529$

Aire par excès

On décide de découper l'intervalle $[1,3]$ en 5 parties égales
de largeur $\Delta x = \dfrac{3-1}{5} = \dfrac{2}{5} = 0,4$
de hauteur $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $x = 1,4$ puis $1,8$.... On calcule facilement :

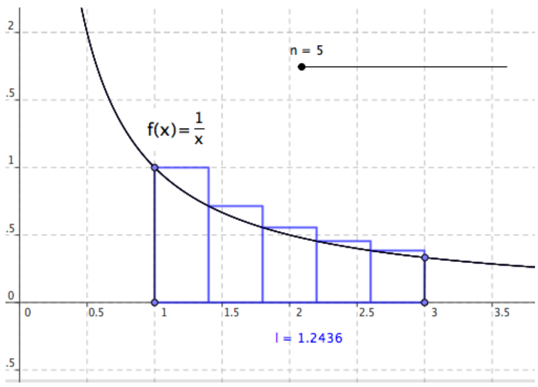


FIG. 6 – 5 rectangles au dessus de la courbe

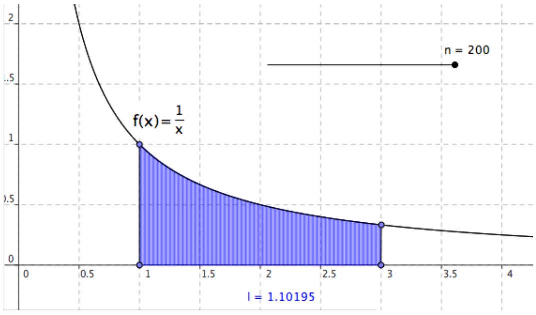
aire rectangle 1 $= f(x_1) \cdot \Delta x = f(1) \cdot 0,4 = \dfrac{1}{1} \cdot 0,4$

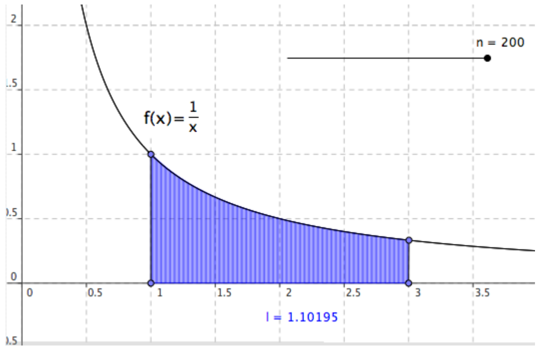
aire rectangle 2 $= f(x_2) \cdot \Delta x = f(1,4) \cdot 0,4 = \dfrac{1}{1,4} \cdot 0,4$

....

aire rectangle 5 $= f(x_5) \cdot \Delta x = f(2,8) \cdot 0,4 = \dfrac{1}{2,8} \cdot 0,4$

L'aire totale peut s'écrire $\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x$ avec $x_i = 1; 1,4; 1,8; 2,2; 2,8$ et vaut $1,2436...$





Pour $n = 15$, l'aire approchée est $1,14437$
Pour $n = 200$, l'aire approchée est $1,10195$

On a donc *encadré* l'aire cherchée par une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès.
Pour 200 "rectangles", on peut écrire

$$1,09529... \leqslant \text{aire exacte} \leqslant 1,10195...$$

Généralisation

Soit une fonction $f(x)$ positive sur l'intervalle $[a, b]$.
Pour calculer l'aire de la surface délimitée par

- le graphique de $f(x)$
- l'intervalle $[a, b]$ sur l'axe des abscisses
- les 2 droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$

on divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
On calcule une valeur approchée par défaut de l'aire en faisant la somme des aires des n rectangles "sous la courbe" $S_{inf} = \sum_{a}^{b} f(x)\Delta x$ (somme inférieure de Darboux).
On calcule une valeur approchée par excès de l'aire en faisant la somme des aires des n rectangles "au-dessus la courbe" $S_{sup} = \sum_{a}^{b} f(x)\Delta x$ (somme supérieure de Darboux.
On obtient ainsi un encadrement de l'aire exacte S :

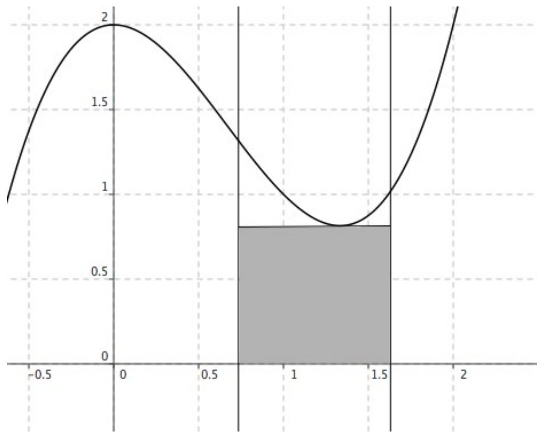
$$S_{inf} \leqslant S \leqslant S_{sup}$$

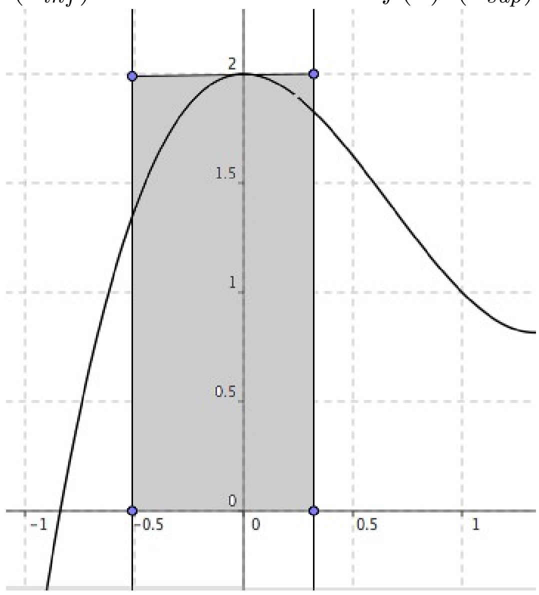
On comprend aisément que pour améliorer la précision (resserrer l'intervalle), il est nécessaire d'augmenter n ce qui revient à diminuer Δx.

Remarques importantes

(1) La fonction $f(x)$ doit être continue sur l'intervalle $[a, b]$.

(2) Si la fonction $f(x)$ *n'est pas monotone* sur l'intervalle $[a, b]$, il faut calculer, sur chaque sous-intervalle, le minimum de $f(x)$ (S_{inf}) ou le maximum de $f(x)$ (S_{sup})





ce qui implique le calcul de dérivée, d'extrémum, ...

(3) SI $f(x)$ est positive sur l'intervalle $[a, b]$, le produit $f(x) \cdot \Delta x$ peut être considéré *géométriquement* comme l'aire d'un rectangle (les 2 grandeurs $f(x)$ et Δx devant absolument être positives).

Conclusions, notations, formule de Leibniz